(1) i. Ονομάζουμε $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3} - 5}$, $n \geq 4$

$a_n > 0$, $\forall n \geq 4$. Επιλέγουμε $\beta_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} =$

$= \dfrac{\cancel{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n})^{3\,2}} = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 4$.

Αφού $\lim\limits_{n} \dfrac{a_n}{\beta_n} = \lim\limits_{n} \dfrac{\dfrac{\cancel{\sqrt{n}}}{\sqrt{n^3}-5}}{\dfrac{\cancel{\sqrt{n}}}{\sqrt{n^3}}} = \lim\limits_{n} \dfrac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3}-5}$

$$= \lim_{n} \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{5}{\sqrt{n^3}}}_{0}} = 1 > 0,$$

απ' το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης σειρών,

$\sum\limits_{n=4}^{\infty} a_n = +\infty$, επειδή $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \beta_n = +\infty$ (ως αρμονική σειρά τάξης 1)

ii. Η ακολουθία $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$, $n \geq 2$ είναι ≥ 0 και φθίνουσα, γιατί $\forall n \geq 2$

$n+1 > n \implies \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ (1)

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

και $\ln(n+1) > \ln n \Rightarrow \dfrac{1}{\ln(n+1)} < \dfrac{1}{\ln n}$ (2)

Πολ/ζουμε κατά μέλη τις (1) και (2), οπότε

$a_{n+1} < a_n$

Με εφαρμογή του Κριτηρίου Συμπύκνωσης σειρών

Εφόσον η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{2^n} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n}(\ln 2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot (\ln 2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\ln^2 2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \quad (\text{ως } p=2 - \text{αρμονική})$$

$\Rightarrow$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

ii. Κέντρο δυναμοσειράς το $x_0 = 0$

Ακολουθία συντελεστών $c_n = \dfrac{1}{n \cdot 4^n}$, $n \in \mathbb{N}$

Ακτίνα σύγκλισης:

$$R = \lim_n \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_n \frac{\frac{1}{n \cdot \cancel{4^n}}}{\frac{1}{(n+1)\cancel{4^{n+1}}}} = \lim_n \frac{4(n+1)}{n}$$

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

$$= \lim_n 4\left(1 + \cancel{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}\right) = 4 > 0$$

Άρα, η σειρά συγκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}: |x|<4$

και αποκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}: |x|>4$

Για τα άκρα:

Αν $x=-4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n \cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < +\infty$

(απ' το Κριτήριο Liebnitz) και

Αν $x=4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{4^n}}{n \cdot \cancel{4^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

(ως αρμονική τάξης 1).

Συνολικά, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 4^n}$ συγκλίνει

ανν $x \in [-4, 4)$.

---

(2) Αρχικά οι f, g είναι συνεχείς στα αντίστοιχα διαστήματα που ορίζονται. Επίσης, για την f, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\frac{2}{\pi} \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \overset{u = x - \frac{\pi}{2}}{=\!=} \lim_{u \to 0^-} \frac{\cos(u + \frac{\pi}{2})}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0^-} \frac{\sin(-u)}{u} = -\lim_{u\to 0^-} \frac{\sin u}{u} = -1 \in \mathbb{R}$$

Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Τώρα, για την g, αρκεί νδο η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$. Πράγματι,

$$\forall\, x \geq 1 : \quad 0 < g'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^{3/4}} \leq \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Άρα, απ' το Θεώρημα φραγμένης μεταβολής η g είναι Lipschitz στο $[1,+\infty)$, άρα η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$

(3) Θυμίζουμε ότι αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής $g \geq 0$ και $\int_0^1 g(x)\,dx = 0$, τότε $g(x) = 0,\ \forall x \in [0,1]$. Εδώ τώρα

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

Θέτουμε $g(x)=e^{f(x)}-1$, $x\in[0,1]$

Τότε, g συνεχής στο $[0,1]$ (φανερό)

$g(x)=e^{f(x)}-1\geq 0$, $\forall x\in[0,1]$, επειδή

$\forall\ 0\leq x\leq 1 \Rightarrow f(x)\geq 0 \Rightarrow e^{f(x)}\geq e^{0}=1$

$\Rightarrow g(x)=e^{f(x)}-1\geq 0$

Τέλος, $\int_0^1 e^{f(x)}dx=1 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{f(x)}dx=\int_0^1 1\,dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 (e^{f(x)}-1)\,dx=0 \Leftrightarrow \int_0^1 g(x)\,dx=0$

Άρα, $g(x)=0$, $x\in[0,1] \Rightarrow e^{f(x)}=1$, $x\in[0,1] \Rightarrow$

$f(x)=0$, $x\in[0,1]$ $\square$

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

(4) Έστω f αύξουσα. Τότε, $\forall x\in\mathbb{R}: \alpha\leq x\leq\beta$

$\Rightarrow f(\alpha)\leq f(x)\leq f(\beta)$

∘ Εάν $f(\alpha)=f(\beta) \Rightarrow f$ σταθερή $\Rightarrow f$

ολοκληρώσιμη με $\int_\alpha^\beta f = f(\alpha)\cdot(\beta-\alpha)$

o Εάν $f \neq$ σταθερή, έστω $n \in \mathbb{N}$ και διαμέριση

$$P_n = \left\{ \alpha < \alpha + \frac{\beta-\alpha}{n} < \alpha + 2\cdot\frac{\beta-\alpha}{n} < \dots < \alpha + (n-1)\frac{\beta-\alpha}{n} < \alpha + \cancel{n}\cdot\frac{\beta-\alpha}{\cancel{n}} = \beta \right\}$$

του διαστήματος $[\alpha,\beta]$. Είναι

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sup f([t_{k-1}, t_k])$$

$f \nearrow$ και άρα το $\sup f$ πιάνεται στο δεξί άκρο του $[t_{k-1}, t_k]$

$$\overset{}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta-\alpha}{n} f(t_k) = \frac{\beta-\alpha}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(t_k)$$

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \inf f([t_{k-1}, t_k])$$

$f \downarrow$ και άρα το $\inf f$ πιάνεται στο αριστερά άκρο του $[\alpha,\beta]$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta-\alpha}{n} \cdot f(t_{k-1}) = \frac{\beta-\alpha}{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})$$

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

Οπότε,

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{\beta-\alpha}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k) - \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1}) \right)$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{n} \cdot \left(\cancel{f(t_1)} + \dots + \cancel{f(t_{n-1})} + f(t_n) - f(t_0) - \cancel{f(t_1)} - \dots - \cancel{f(t_{n-1})} \right)$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{n} \left(f(t_n) - f(t_0) \right) = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{(\beta-\alpha)\left(f(\beta) - f(\alpha)\right)}_{\text{αριθμός ανεξ. του } n} \xrightarrow{n} 0,$$

Άρα, απ' το Κριτήριο Riemann ($2^{η}$ μορφή) η f είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[α, β]$ □

(5) i) $I_1 = \int \frac{dx}{(x-3)(x+4)^2}$

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

Ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{(x-3)(x+4)^2} = \frac{α}{x-3} + \frac{β}{x+4} + \frac{γ}{(x+4)^2}, \quad \forall x \neq -4, 3$$

$$1 = α(x+4)^2 + β(x-3)(x+4) + γ(x-3)$$

$$1 = (α+β)x^2 + (8α+β+γ)x + (16α-12β-3γ)$$

$$\begin{cases} α+β=0 \longrightarrow β=-α \\ 8α+β+γ=0 \longrightarrow 7α+γ=0 \\ 16α-12β-3γ=1 \longrightarrow 28α-3γ=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$49 \cdot α = 1 \Rightarrow α = \frac{1}{49}$ και $γ = -\frac{7}{49}$

$β = -\frac{1}{49}$

Άρα, $I_1 = \frac{1}{49} \cdot \left(\int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x+4} - 7\int \frac{dx}{(x+4)^2} \right)$

$$= \frac{1}{49} \cdot \left(\ln|x-3| - \ln|x+4| + \frac{7}{x+4} \right) + c$$

$$I_2 = \int \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx = \int \cos^2 x \, \sin^2 x \, \sin x \, dx$$

$$= \int \cos^2 x \cdot (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx .$$

Θέτουμε $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx$

Άρα, το I_2 γίνεται:

$$I_2 = \int u^2 (1-u^2)(-du) = \int (u^4 - u^2) du$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + c = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + c .$$

ii) Το $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}-2} = +\infty$, γιατί

$\int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty$ (γιατί είναι p-ολοκλήρωμα

με $p = \frac{1}{2} < 1$) και επίσης

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}-2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{2}{\sqrt{x}}} = 1 > 0$$

(Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης ολοκληρωμάτων).

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr